CALCULAREA IMEDIATA A UNOR INTEGRALE DE TIP POISSON

Florentin SMARANDACHE[1] & Mircea Eugen SELARIU[2]

[1]Chair of Department of Math & Sciences, University of New Mexico-Gallup, USA

[2]Polytechnic University of Timisoara, Romania

ABSTRACT

Lucrarea prezinta, in paralel, doua metode de rezolvare a unor integrale mai complexe, printre care si integrala lui Poisson, pentru a evidentia, mai pregnant, avantajele unei noi metode de integrare, care foloseste functiile supermatematice circulare excentrice. Sunt exploatate, in special, posibilitatiile trecerii / schimbarii facile a functiilor supermatematice circulare excentrice de variabila centrica α cu aceleasi functii de variabila excentrica θ. Unghiul α este unghiul la centru O(0,0), care reprezinta variabila centrica si θ este unghiul la excentrul E (k, ε), reprezentand variabila excentrica. Ele sunt unghiurile din care se vad punctele W_1 si W_2 de pe cercul unitate - rezultate din intersectia cercului unitate / trigonometric cu dreapta turnanta d in jurul excentrului E (k, ε)- din O si ,respectiv, din E.

KEYWORDS AND ABBREVIATIONS

C-centric, circular, **CC**-circular centric, **E**- excentric, **CE**-Circulare Excentrice, **F**-Functie ,**H**-Hiperbolice, **IP**-Integrala lui Poisson, **M**- Matematica, **MC**-Matematica Centrica, **ME**- Matematica Excentrica, **SM** –Supermatematica. **FSM- F & SM, FSM_CE- FSM & CE, FSM_HE-FSM & HE.**

0. INTRODUCERE

Aparitia matematicii excentrice (**ME**), ca o extensie vasta a matematicii centrice(**MC**) / ordinare, impreuna cu care alcatuiesc supermatematica (**SM**), permite noi abordari, cu mult mai simple, de solutionare a unor integrale mai complexe, printre care se numara si integrala (11) a lui Poisson (**IP**) [1] . Pentru a scoate in evidenta noua metoda de integrare, se vor prezenta, in paralel, metoda clasica de rezolvare, numai pentru **IP**, prezentata in [1] si noua metoda care utilizeaza functii **SM** circulare excentrice (**CE**) [2], [3], [4] .

Functiile **SM-CE**, care vor sta in centrul atentiei in continuare, sunt functiile radial excentric rex θ si Rex α si derivat excentric dex θ si Dex α, functii independente de sistemul de referinta ales.

Functiile rex θ, de variabila excentrica θ, de determinare principala 1 si secundara 2, definite pe toata axa reala pentru excentricitate numerica $k^2 < 1$,iar pentru $k^2 > 1$ exista doar in intervalul $\Im \in (\theta_i, \theta_f)$, in care $\theta_{f,i} = \pi + \varepsilon \pm \arcsin(1/k)$, $\alpha_{f,i} = \theta_{f,i} + \beta_{f,i}$ sunt

(1) $rex_{1,2}\,\theta = rex_{1,2}\,(\theta, E(k,\varepsilon)) = -k.\cos(\theta-\varepsilon) \pm \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\eta)}$, in care **E (k, ε)** este un pol, denumit **excentru**, care imparte dreapta d ($d = d^+ \cup d^-$), turnanta in jurul acestui punct, in semidreapta pozitiva d^+, pe care se situeaza prima determinare- principala- $rex_1\,\theta$, ca functie de variabila excentrica θ si, respectiv, Rex α_1 , de variabiola centrica α a functiei si in semidreapta negativa d^-, pe care se situeaza, de-a-lungul ei, a doua determinare, secundara, a functiei $rex_2\,\theta$ si Rex α_2. Expresiile acelorasi entitati (1), ca functii de variabila centrica α, care exista pe toata axa reala, oricare ar fi excentricitatea numerica k, sunt

(2) $$\text{Rex}\ \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{1+k^2-2k.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}$$

Aceste functii reprezinta, asa cum a observat Prof.dr.mat. Octav Gheorghiu, **distanta** in plan, ca

segmente orientate, in **coordonate polare**, dintre doua puncte : excentrul E (k, ε) si punctele de intersectie $W_{1,2}$ (1, $\alpha_{1,2}$) - dintre dreapta d si cercul unitate CT [1, O(0,0)] cu centrul in originea sistemului de axe de coordonate O, cartezian drept sau intr-un reper polar. Pentru un E interior discului unitate,

segmentul EW_1 este situat pe directia pozitiva a semidreptei d^+, fiind, in acest caz, pozitiv, adica Rex $\alpha_1 = rex_1\theta > 0$, in timp ce, segmentul orientat EW_2, orientat pozitiv pe semidreapta negativa este negativ, adica Rex $\alpha_2 = rex_2\,\theta < 0$,asa cum se poate observa in figura 1. Pentru k = ± 1 la $\alpha_1 \in (0, 2\pi) \Rightarrow \theta \in (0, \pi)$ si la $\alpha_2 \in (0, 2\pi) \Rightarrow \theta \in (\pi, 2\pi)$. Altfel spus, daca dreapta d se roteste in jurul lui E(k,ε) ⊂ C(1,O) cu viteza unghiulara Ω ($\theta = \Omega t$), punctele $W_{1,2}$ se rotesc pe cercul unitate C(1,O) cu o viteza unghiulara dubla ($\alpha_{1,2} = 2\Omega t$) o singura jumatate de perioada si in cea de a doua jumatate de perioada stationeaza ($\alpha_{1,2} = 0$) pe rand in E (k, ε).

Daca E este exterior discului unitate, adica |k | > 1, atunci ambele determinari se vor afla pe aceeasi semidreapta, fiind succesiv, ambele pozitive si apoi, dupa rotirea lui d cu π, ambele negative, deci sunt de acelasi semn, ceea ce face ca produsul lor sa fie , in acest caz, pozitiv, iar, in cazul anterior, produsul celor doua determinari ale functiei era mereu negativ (v. Fig.1). Mai trebuie observat ca la k > 1 si pentru $\alpha_{1,2} \in (0, 2\pi) \Rightarrow \theta \in (\theta_i , \theta_f)$; variabila excentrica θ isi diminueaza intervalul de existenta al FSM-CE, intre o valoare initiala θ_i si una finala θ_f, cu atat mai mult cu cat creste excentricitatea numerica k. Pentru $k \to \infty$ intervalul reducandu-se la cate

un singur punct de pe axa reala ***R***, pentru fiecare determinare. Cele expuse anterior, rezulta si din relatiile prezentate in continuare.

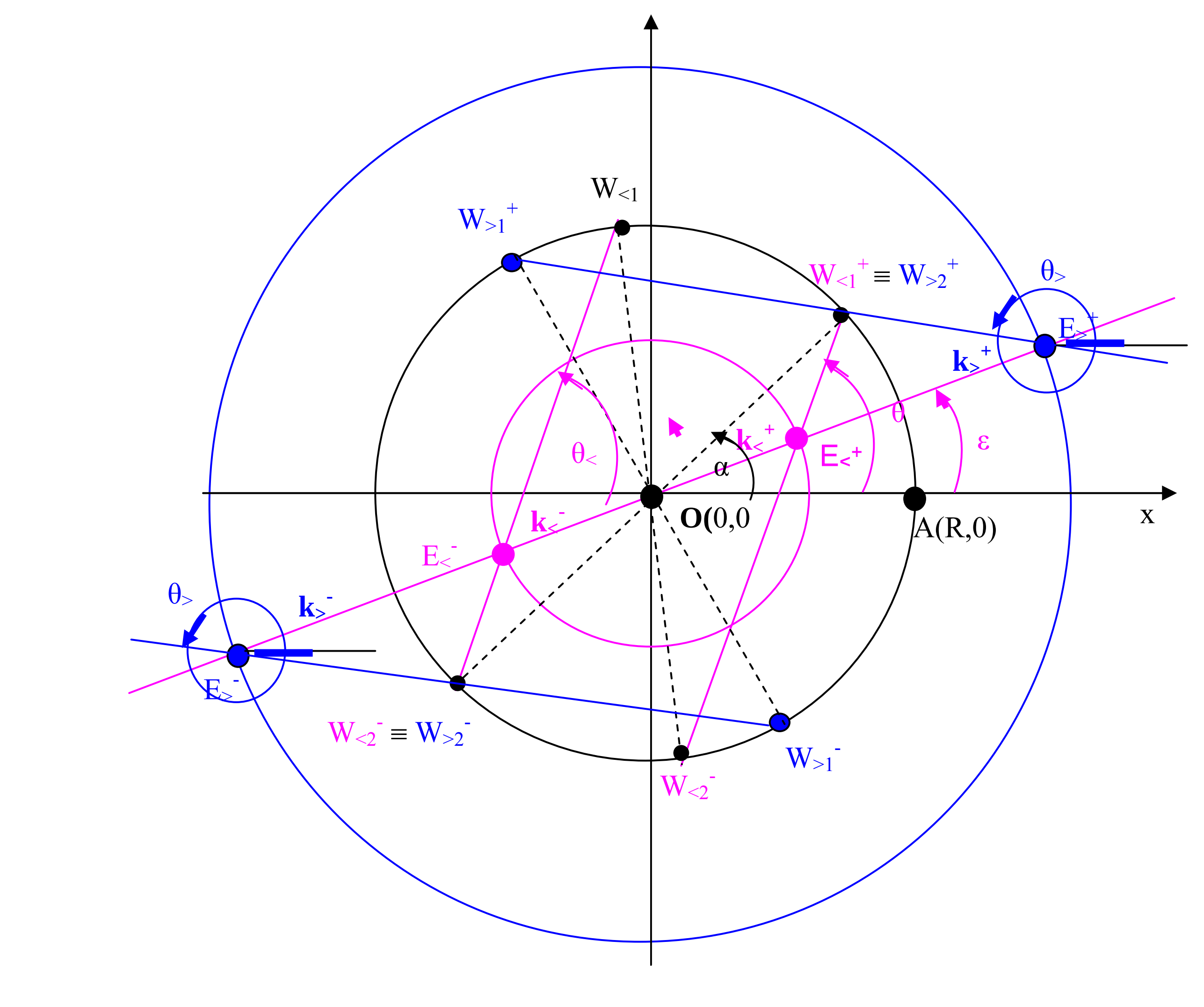


Fig. 1 Reprezentarea functiilor $rex_{1,2}\,\theta$ si $Rex\alpha_{1,2}$ $(EW_{1,2})$ pe cercul unitate.

Dependenta dintre cele doua variabile este

(3) $\alpha_{1,2}(\theta) = \theta - \beta_{1,2}(\theta) = \theta \mp \arcsin[e.\sin(\theta - \varepsilon)]$ si, respectiv

(4) $$\theta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \beta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \arcsin\left(\frac{k.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\pm\sqrt{1+k^2-2k.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}}\right) =$$

$$= \alpha_{1,2} + \arcsin\left(\frac{k.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\operatorname{Re} x\alpha_{1,2}}\right)$$ sau

(4’) $$\theta(\alpha_{1,2}) = \alpha_{1,2} + \arctan\left(\frac{k.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1-k.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}\right) = \alpha_{1,2} + \arctan\left(\frac{\sin\beta(\alpha_{1,2})}{\cos\beta(\alpha_{1,2})}\right)$$, in care

(5) $$\cos\beta(\alpha_{1,2}) = \frac{1-k.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\operatorname{Re} x\alpha_{1,2}}$$ si

(6) $$\sin\beta(\alpha_{1,2}) = \frac{k.\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\operatorname{Re} x\alpha_{1,2}}$$, iar derivata lui $d[\beta(\alpha)]/d\alpha$ este

(7) $$\frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha}=\frac{k[\cos(\alpha-\varepsilon)-k]}{1+k^2-2.k.\cos(\alpha-\varepsilon)}=\frac{k[\cos(\alpha-\varepsilon)-k]}{\operatorname{Re}x^2\alpha_{1,2}}$$

Din (1), rezulta, fara dificultate, ca suma, diferenta, produsul si raportul celor doua determinari ale functiilor rex sunt:

(8) $$\begin{cases}\sum\overset{+}{=}rex_1\theta+rex_2\theta=-2k.\cos(\theta-\varepsilon)\\ \sum\overset{-}{=}rex_1\theta-rex_2\theta=2\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}\\ \prod=\mathrm{rex}_1\theta.rex_2\theta=\begin{cases}k^2-1<0,\rightarrow k<1\\ 0,\Rightarrow k=1\\ \pm(1-k^2),\rightarrow k>1\end{cases}\\ \bigcup=\frac{|rex_2\theta|}{rex_1\theta}=\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}=\frac{|1-k^2|}{\operatorname{Re}x^2\alpha_1}=\frac{d(rex_2\theta)}{d(rex_1\theta)}\end{cases}$$

O functie la fel de utila, in cadrul prezentei lucrari, este functia derivata excentrica de variabila centrica α, a carei forma a expresie este invarianta la pozitia excentrului E este

(9) Dex $\alpha_{1,2}$ = $\frac{1-k.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{1+k^2-2k.\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}$ =: $\frac{d\theta}{d\alpha_{1,2}}=\frac{d(\alpha_{1,2}+\beta_{1,2})}{d\alpha}=\frac{1}{dex_{1,2}\theta}$, iar

(10) dex$_{1,2}$ = 1– $\frac{k.\cos(\theta-\varepsilon)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\varepsilon)}}$ si nucleul integralei Poisson

(11) Nip $\alpha_{1,2}$ = $\frac{d\gamma}{d\alpha_{1,2}}=\frac{d(\theta+\beta)}{d\alpha_{1,2}}$ = 1+ 2 $\frac{d\beta}{d\alpha_{1,2}}=\frac{1-k^2}{1+k^2-2k(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}=\frac{1-k^2}{\operatorname{Re}x^2\alpha_{1,2}}$ =

= $-\frac{\operatorname{Re}x\alpha_2}{\operatorname{Re}x\alpha_1}$

1. INTEGRAREA PRIN METODA CLASICA [1]

Integrala lui Poisson, cu notatiile modificate, corespunzatoare functiilor supermatematice circulare excentrice (SM - CE), este

(12) IP (k, ε) = $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha}{1+k^2-2.k.\cos(\alpha-\varepsilon)}$, in care $k\in\Re$ si $\varepsilon\in[-\pi,\pi]$ sunt parametrii si, totodata, coordonatele polare ale excentrului E. Ea este solutionata in [1] ca o integrala simpla ce depinde de un parametru real $\lambda\equiv$ k, notat, in continuare, cu k si reprezentand, in ME, excentricitate numerica k = e / R, raportul dintre excentricitatea reala e si raza cercului R pe care sunt dispuse punctele de intersectie W_1 si W_2. Integrala este simpla, dar integrarea este destul de laborioasa, asa cum se va vedea in continuare, si va fi intradevar simpla, numai prin trecrea din **MC** in **ME** cu utilizarea noilor functii supermatematice.

<u>S o l u t i a c l a s i c a</u> : Functia periodica reala

(13) f(α) = $\frac{1}{1+k^2-2k\cos(\alpha-\varepsilon)}$ este, dupa cum lesne se poate observa, inversa patratului functiei radial excentric de α

(14) f(α) = 1 / (Rex^2 α), definita pentru oricare k ∈ ℜ – {±1} si φ ∈ [-π, π] .

Observatie : numai una din cele doua determinari ale functiei $Rex\alpha_{1,2}$ este nula (!) cand E apartine cercului unitate, adica /k/ = 1; cea de a doua determinare avand expresia prezentata in continuare. Pe baza noilor cunostinte din **ME**, acum se poate afirma ca functia radial excentric este definita si pentru k = ± 1. Daca k = +1, atunci

(15) $rex_{1,2}$ θ = - cos(θ-ε) ± $\sqrt{1-\sin^2(\theta-\varepsilon)}$ →

rex_1 θ = Rex α_1 = 0 si rex_2θ = Rex α_2 = – 2cos(θ– ε) iar, pentru k = –1, rezulta

(16) $rex_{1,2}$ θ = cos(θ-ε) ± $\sqrt{1-\sin^2(\theta-\varepsilon)}$ astfel ca , acum, rex_1θ = Rex α_1 = 2 cos (θ-ε) si rex $_2$θ = Rex α_2 = 0, ceea ce rezulta si se poate vedea, la fel de simplu, si din grafic.

Deoarece

(17) Rex^2 α = [k– $e^{i(\alpha-\varepsilon)}$].[k – e $^{-i.(\alpha-\varepsilon)}$] = [k–rad(α-ε)].[k – rad-(α- ε)] , in care, functiile radial centrice [5], sau pe scurt, radial (notata **rad**), echivalente cu functiile exponentiale, sunt vectori unitate, de directii simetrice, fata de dreapta ce contine punctele O si E, astfel ca :

(18) rad (α- ε) – rad[- (α - ε)] = 2 cos(α - ε) si

(19) rad(α-ε) . rad-(α-ε) = $\frac{rad(\alpha-\varepsilon)}{rad(\alpha-\varepsilon)}=1$, in care

(20) rad α = $e^{i\alpha}$ este echivalenta, <u>in centric</u> (pentru k = 0, cand α_1 = θ si α_2 = θ + π) a functiilor rex θ si Rexα [5].

Functia Rex^2α (16) are radacinile

(21) e $^{\pm(\alpha-\varepsilon)}$ = rad[±(α–ε)] care, pentru α = ε ca si pentru α = ε –π, din (14) rezulta

(22) k = ±1.

Introducand in **IP** variabila α' = α + π, schimbarea conduce la integrala

(23) **IP** (– k) = $\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha'}{1+k^2+2k.\cos(\alpha'+\varepsilon)}$, in care excentricitatea numerica schimba de semn, adica k → – k , ceea ce este echivalent cu rotirea excentrului E(k, ε) in jurul originii O (0,0) cu π, pe cercul de raza k, adica ε → ± (ε ± π), sau, inca, datorita posibilitatiilor de interconvertire a lui α cu ε in functia cosinus din (12), α → ± (α ± π).

Presupunand k ≠ ± 1, schimbarea de variabila α' = α + π

(24) z = $e^{i(\alpha'+\varepsilon)}$, pentru care

(25) dz / z = $\frac{der(\alpha'+\varepsilon)d\alpha'}{rad(\alpha'+\varepsilon)}=\frac{i.rad(\alpha'+\varepsilon)d\alpha'}{rad(\alpha'+\varepsilon)}$ = i dα' va transforma segmentul [–π, + π]

in circumferinta unitate, parcursa in sens trigonometric pozitiv (sinistrorum / levogin) . Atunci

(26) $$IP(k,\alpha) = i\int_C \frac{dz}{(1+k^2)z+(1+z^2)k} = \frac{i}{k}\int_C \frac{dz}{z^2+mz+1},$$ in care m = k +1/k. Polii functiei f(z) de sub semnul $\int_C$ sunt z' = – k si z" = – 1 / k cu reziduurile a'$_{-1}$ = Rez[f(z), -k] = k / (k² - 1) si a"$_{-1}$ = Rez[f(z), -1 / k] = k / (1 – k²), astfel ca a'$_{-1}$ + a"$_{-1}$ = 0 . Rezulta, aplicand teoremele reziduurilor si a semireziduurilor, ca oricare ar fi unghiul ε ∈ [–π, +π]

(27) $$IP(k,\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1-k^2}, \ pentru |k| < 1; \\ 0, \ pentru k = \pm 1 \\ \dfrac{2\pi}{k^2-1}, \ pentru, |k| > 1 \end{cases}$$

Valoarea zero pentru $\lim\limits_{k\to\pm1} IP(k,\varepsilon)$ se gaseste alegand conturul Γ compus din circumferintele C si γ (fig. 2) , ultima avand centrul in z" = 1 / k si raza r < 1, din care s-au suprimat portiunile interioare reuniunii celor doua cercuri. In aceste conditii, integrala $\int_\Gamma \frac{dz}{z^2-kz+1}$ este nula chiar cand k → 1 (sau –1), ea aparand ca o valoare principala in sensul Cauchy. Se poate atunci scrie

(28) $$IP(k,\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{|1-k^2|}, \ pentru \Rightarrow k = \Re - \{\pm 1\} \\ 0, \ pentru \Rightarrow k = \pm 1 \end{cases}$$

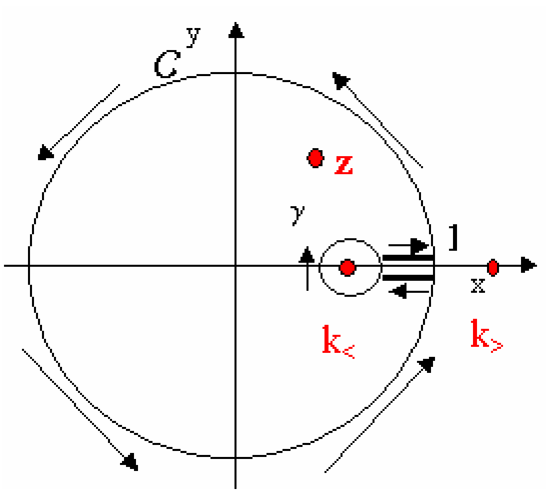


Fig. 2 Desen explicativ

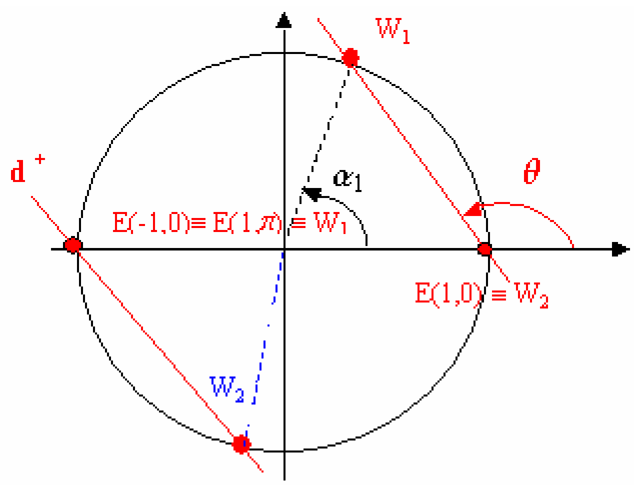


Fig. 3 Functiile Rex$_{1,2}$ si rex$_{1,2}$ de k = ± 1 si ε = 0

Rezultatul (28), prezentat in [1], poate fi stabilit si direct, stiind ca din (14), pentru k = 1 rex$_1$θ = 0, pentru k = –1, rex$_2$ θ = 2cos(α-ε) astfel ca

(28) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{\operatorname{Re} x^2 \alpha_2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{4\cos^2(\alpha-\varepsilon)} = \frac{1}{4}\left|\tan(\alpha-\varepsilon)\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4}[\tan(\pi-\varepsilon)-\tan(-\pi-\varepsilon)] = 0$$

Pentru k ≠ ± 1, integrala este prezentata in continuare.

2. INTEGRAREA CU AJUTORUL FUNCTIILOR SUPERMATEMATICE CIRCULARE EXCENTRICE.

Multiplicand **IP**(k, ε) cu (1–k²) / (1–k²) rezulta

(29) **IP** (k, ε) = $\frac{1}{1-k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-k^2}{\mathrm{Re}\,x^2\alpha_{1,2}}d\alpha$ = $\frac{1}{1-k^2}\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{\mathrm{Re}\,x_2\alpha}{\mathrm{Re}\,x_1\alpha}d\alpha$ =

= $\frac{1}{1-k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d(\theta+\beta)}{d\alpha}d\alpha$ = $\frac{1}{1-k^2}\int_{-\pi}^{\pi}d(\theta+\beta)$ = $\frac{1}{1-k^2}\left|\theta+\beta\right|_{-\pi}^{\pi}$ = $\frac{2\pi}{1-k^2}$, pentru k < 1 si

(30) **IP** (k, ε) = $\frac{1}{1-k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{Re}\,x\alpha_2}{\mathrm{Re}\,x\alpha_1}$ = $\frac{-2\pi}{1-k^2}$, pentru k > 1, in care s-a tinut cont de relatia (9)

si de semnul functiilor Rex $\alpha_{1,2}$, pentru k < 1 si pentru k > 1, adica un excentru interior sau exterior discului unitate si de relatia, pentru k < 1. Relatiile dintre limitele de integrare, tinand cont de dependentele [2]

(31) $\begin{cases}\alpha_1=\theta-\beta\\ \alpha_2=\theta+\beta+\pi\end{cases}$ stiind ca $\beta_1 + \beta_2 = \pi$ [3] sunt :

(32) Daca $\alpha_1 \in [-\pi, \pi] \Rightarrow$ atunci $\theta \in [\pi - \beta_1, \pi + \beta_1]$ si diferenta lor este +2π, iar daca

(33) $\alpha_2 \in [-\pi, \pi]$, atunci $\Rightarrow$ $\theta \in [-2\pi - \beta, -\beta]$, asa cum se poate observa si in figura1si diferenta lor este –2π.

(34) $1+2\frac{d\beta}{d\alpha}=1+2\frac{e[(\cos(\alpha-\varepsilon)-e]}{\mathrm{Re}\,x^2\alpha_{1,2}}=\frac{1-k^2}{\mathrm{Re}\,x^2\alpha_{1,2}}=\frac{d\alpha}{d\alpha}+\frac{d(2\beta)}{d\alpha}=\frac{d(\alpha+\beta+\beta)}{d\alpha}=\frac{d(\theta+\beta)}{d\alpha}$

deoarece θ = α + β, iar pentru

(35) $\alpha = \begin{cases}\gamma_1=-\pi\rightarrow\theta=-\pi+2\beta_{1,2}\\ \gamma_2=\pi\rightarrow\theta=\pi+2\beta_{1,2}\end{cases}$, asa cum rezulta si din figura , astfel ca

(36) $\gamma_2 - \gamma_1 = 2\pi$

C O N C L U Z I I

Dat fiind volumul de munca in cele doua variante, concluzia este, evidenta, in favoarea noii metode de integrare, tinand cont, in primul rand, de gradul de complexitate al integrarii.

Utilizand relatiile existente in ME, ca de exemplu relatia (28), care se poate scrie, notand cu $\gamma = \theta + \beta$, de unde $d\gamma = d(\theta + \beta)$, dar $\alpha = (\theta - \beta)$ si $d\alpha = d(\gamma - 2\beta)$ sau $d\alpha = d(\theta - \beta)$, astfel ca $d\gamma / d\alpha = 1 + 2.d\beta / d\alpha = -\frac{k.\cos(\theta-\varepsilon)}{rex_1\theta}=-\frac{\mathrm{Re}\,x\alpha_2}{\mathrm{Re}\,x\alpha_1}=\frac{1-k^2}{\mathrm{Re}\,x^2\alpha_{1,2}}$ si **IP** este o integrala

imediata, k fiind un parametru constant, asa cum s-a vazut anterior. Mai mult, din relatia (29) rezulta valoarea integralei Poisson **nedefinita** ca fiind

(37) $IP_N = \int \frac{d\alpha}{\operatorname{Re} x^2\alpha} = \frac{1}{|1-k^2|}[\theta(\alpha)+\beta(\alpha)] = \frac{1}{|1-k^2|}[\alpha+2\beta(\alpha)] = \frac{\alpha + 2\arcsin\frac{k\sin(\alpha\varepsilon)}{\operatorname{Re} x\alpha}}{|1-k^2|}$

Integralele, calculate in [1] cu ajutorul teoremei reziduurilor

(38) $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{R - r\cos(\alpha-\varepsilon)}{R^2+r^2-2r\cos(\alpha-\varepsilon)}$, in care cu r = k.R s-a notat excentricitatea reala si cu

R raza unui cerc oarecare si

(39) $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{r\sin(\alpha-\varepsilon)}{R^2+r^2-2r\cos(\alpha-\varepsilon)}$ care, prin metodele clasice prezentate in [1, pag 186 … 187]

sunt la fel de laborioase si, din pacate gresite, prin noua metoda, din ME, aceste integrale sunt imediate. Reducandu-l pe R din (38) si (39) rezulta functiile de integrat :

(40) $F_1 = \frac{R - r\cos(\alpha-\varepsilon)}{R^2+r^2-2r\cos(\alpha-\varepsilon)} = \frac{1-k\cos(\alpha-\varepsilon)}{\operatorname{Re} x^2\alpha}$ = Dex $\alpha_{1,2} = \frac{d\theta}{d\alpha}$ astfel ca integrala

nedefinita este

(41) $I_{1N} = \int \frac{d\theta}{d\alpha} d\alpha = \int d\theta = \theta(\alpha_{1,2}) = \alpha + \arcsin[\frac{k\sin(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}{\pm\sqrt{1+k^2-2k\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}}]$, astfel ca,

integrala definita (38) va fi :

- Pentru k = +1 ⇒ $I_1 = \pi$, deoarece in prima determinare 1 (principala) $\theta(\alpha = 0) = \pi/2$ iar $\theta(\alpha=2\pi) = 3\pi/2$ si diferenta este π. Daca k = – 1 pentru prima determinare $\theta(\alpha=0) = \pi$ iar $\theta(\alpha = 2\pi) = 2\pi$, astfel ca diferenta este tot π. Rezulta ca pentru |k| = 1 ⇒ $I_1 = \pi$ si nu $\frac{\pi}{r}$ cum, din gresala, este trecut in [1, pag. 187].
- Pentru k > 1, valoarea integralei I_1 este 0 si nu $\frac{\pi}{r}(1+\frac{1}{k})$, cum din gresit se prezinta, iar
- pentru k < 1, valoarea integralei este 2 π si nu 0, cum din gresala s-a obtinut in [1].

Integrala I_{2N} nedefinita este

(42) $I_{2N} = \int \frac{k.\sin(\alpha-\varepsilon)}{1+k^2-2k\cos(\alpha-\varepsilon)} d\alpha = \int \frac{k.\sin(\alpha-\varepsilon)}{\operatorname{Re} x^2\alpha} d\alpha = \int \frac{1}{\operatorname{Re} x\alpha} \frac{d(\operatorname{Re} x\alpha)}{d\alpha} d\alpha$ = ln|Rexα|

Astfel ca, integrala definita I_2 este

(43) $I_2 = \left|\ln|\operatorname{Re} x\alpha|\right|_0^{2\pi} = 0$, oricare ar fi k si ε, stiind ca Rex0 = rex0 = Rex2π = rex2π.

Multe alte integrale pot fi astfel solutionate imediat si fara dificultate daca se cunosc expresiile unor functii supermatematice. Cateva integrale sunt prezentate in lucrarea [6]

BIBLIOGRAFIE

[1]	Bãdescu, Radu; Maican, C-tin	**INTEGRALE** utilizate in mecanica, fizica, tehnica si calculul lor	Ed. Tehnica, Bucuresti, 1968, 696 pagini;
[2]	Selariu, Mircea Eugen	FUNCTII CIRCULARE EXCENTRICE	Conf. Nat. Vibr. In Constr. de Masini, Timisoara, pag 101 – 108;
[3]	Selariu, Mircea Eugen	FUNCTII CIRCULARE EXCENTRICE si EXTENSIA LOR	Bul. St. si Tehn. al IPTVT, Timisoara, Seria Mec., Tom 25 (39), Fasc. 1-1980, pag. 95 – 100;
[4]	Selariu, Mircea Eugen	**S U P E R M A T E M A T I C A**	Com. VII Conf. Internat. de Ing. Man. Si Tehnologica, TEHNO'95, Timisoara, Vol.9 Matematica Aplicata, pag. 41 – 64;
[5]	Selariu, Mircea Eugen	FORMA **TRIGONOMETRICA** a **SUMEI si a DIFERENTEI** NUMERELOR COMPLEXE	Com. VII Conf. Internat. de Ing. Man. si Tehn. TEHNO'95 , Vol. 9 : Matematica Aplicata, pag. 65 – 72;
[6]	Selariu, Mircea Eugen; Ajiduah, Crist.; Bozantan, Emil; Filipescu, Avram	**INTEGRALELE** UNOR FUNCTII **SUPERMATEMATICE**	Com. VII Conf. Interat. de Ing. Man. si Tehn. TEHNO ' 95, Timisoara, 1955, Vol. IX: Matem. Aplic. pag. 73 – 82;
[7]	Smarandache, Florentin	A Triple Inequality with Series and Improper Integrals	Bulletin of Pure and Applied Sciences, Vol. 25E, No. 1, 215-217, 2006.